ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

I

A tout entier $n > 0$, on associe la fonction f_n ainsi définie :

$$\forall x \in [-\pi, +\pi], \quad f_n(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx$$

1° Dans le cas particulier où $n = 3$:

a. Exprimer en fonction de cos x le rapport :

$$\frac{f'_3(x)}{\cos 2x}$$

pour $x \neq \frac{\pi}{4}$ et $x \neq -\frac{\pi}{4}$.

b. Étudier les variations de $f_3(x)$ lorsque x parcourt l'intervalle $[0, \pi]$.

c. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, tracer avec soin la courbe représentative Γ_3 du graphe de f_3 (unités de longueur : $\frac{12}{\pi}$ cm sur Ox, 4 cm sur Oy). Préciser les points remarquables de Γ_3, ainsi que les tangentes en ces points.

2° Revenant au cas général :

a. Calculer $f'_n(0)$ et $f'_n(\pi)$. Démontrer par récurrence que, pour $x \neq 0$

$$f'_n(x) = \frac{\cos(n+1)\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - 1\right]$$

b. En déduire les zéros de $f'_n(x)$ sur $[0, \pi[$.

3° On pose, pour tout entier naturel $k < \frac{n}{2}$:

$$u_k = \frac{2k\pi}{n}; \qquad v_k = \frac{2k+1}{n+1}\pi$$

a. Calculer :

$$\lim_{x \to u_k} \frac{\sin\frac{nx}{2}}{x - u_k}; \qquad \lim_{x \to v_k} \frac{\cos(n+1)\frac{x}{2}}{x - v_k}$$

b. En déduire les valeurs de $f''_n(x)$ pour $x = u_k$ et $x = v_k$.

c. Montrer que la fonction f_n possède un maximum au point $x = v_0$.

4° *a.* Établir que la fonction $x \to \frac{\sin x}{x}$ est décroissante sur $]0, \pi[$.

b. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,du \leqslant f_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \leqslant \int_0^{\frac{n\pi}{n+1}} \frac{\sin u}{u}\,du.$$

5° *a.* k étant un entier $\geqslant 1$, démontrer l'égalité :

$$\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin u}{u}\,du = -2\int_0^{\pi} \frac{v \sin v}{4k^2\pi^2 - v^2}\,dv$$

et en déduire l'inégalité :

$$\left|\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin u}{u}\,du\right| > \frac{1}{2k^2\pi}$$

b. En admettant que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2},$$

.../...

démontrer alors que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\, du > \frac{\pi}{2}.$$

c. En déduire que $f_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ tend vers une limite $l > \frac{\pi}{2}$ lorsque n tend vers l'infini.

II

Soit f la fonction 2π- périodique, impaire, définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{2}(\pi - t) \qquad \forall\, t \in]\,0, \pi\,]$$

$$f(0) = 0$$

1° Donner l'expression de $f(t)$ sur $[-\pi, 0[$.

2° Calculer, pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$I_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt\ ; \quad J_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt\ ;$$

$$F_k(x) = I_k \sin kx + J_k \cos kx.$$

3° *a.* Vérifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f_n définie dans la partie I est telle que :

$$\forall x \in [-\pi, +\pi]\,, \qquad f_n(x) = \frac{1}{2} F_0(x) + \sum_{k=1}^{n} F_k(x)\,.$$

b. Calculer, pour tout α réel, la somme :

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha\,.$$

c. En déduire que :

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin (2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{-\pi-x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2u) \frac{\sin (2n+1)u}{\sin u}\, du\,.$$

III

1° Soit g une fonction réelle d'une variable réelle définie et continue sur $[\alpha, \beta]$, $(\beta > \alpha \geqslant 0)$ et soit m un entier > 0 tel que

$$\frac{m(\beta - \alpha)}{2\pi} > 1\,.$$

On désigne par p_m et q_m les entiers tels que

$$p_m - 1 < \frac{m\alpha}{2\pi} \leqslant p_m \quad \text{et} \quad q_m \leqslant \frac{m\beta}{2\pi} < q_m + 1\,.$$

Calculer les limites, lorsque m tend vers l'infini, des intégrales :

$$\int_{\alpha}^{\frac{2\pi}{m} p_m} g(x) \sin mx\, dx\ ; \qquad \int_{\frac{2\pi}{m} q_m}^{\beta} g(x) \sin mx\, dx\,.$$

2° Pour tout entier $k \in [p_m\,,\ q_m\,[$, on pose :

$$H_k = \int_{\frac{2k\pi}{m}}^{(2k+2)\frac{\pi}{m}} g(x) \sin mx\, dx\,.$$

Montrer que :

$$H_k = \frac{1}{m}\int_0^{\pi} \left[g\left(\frac{2k}{m}\pi + \frac{u}{m}\right) - g\left(\frac{2k+1}{m}\pi + \frac{u}{m}\right)\right] \sin u\, du\,.$$

3° Démontrer alors la proposition suivante :

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \qquad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbf{N}\ (m \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow |\, mH_k\,| \leqslant \pi\varepsilon)\,.$$

En déduire que :

$$m \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow \left| \int_{\frac{2\pi}{m} p_m}^{\frac{2\pi}{m} q_m} g(x) \sin mx\, dx \right| \leqslant \frac{\beta - \alpha}{2}\varepsilon\,.$$

4° Calculer la limite, lorsque m tend vers l'infini, de

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x) \sin mx \, dx .$$

5° a étant un nombre réel donné : $a \in]0, \pi[$, et g une fonction réelle continue sur $[0, a]$, démontrer que si, lorsque m tend vers l'infini, l'intégrale

$$\int_0^a g(x) \frac{\sin mx}{x} dx$$

tend vers une limite finie l, l'intégrale :

$$\int_0^a g(x) \frac{\sin mx}{\sin x} dx$$

tend vers la même limite.

On admettra maintenant que tous les résultats de cette partie du problème restent valables si la fonction g présente aux bornes d'intégration des discontinuités de première espèce.

IV

f désignant la fonction définie dans la partie II, on se propose de calculer, pour tout $x \in]0, \pi[$, la limite, lorsque n tend vers l'infini, de l'intégrale :

$$\int_{\frac{-\pi-x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x + 2u) \frac{\sin (2n + 1)u}{\sin u} du .$$

1° Démontrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\frac{-\pi-x}{2}}^{\frac{-x}{2}} f(x + 2u) \frac{\sin (2n + 1)u}{u} du = 0 .$$

2° Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

a. L'intégrale :

$$\int_{-\frac{x}{2}}^{0} f(x + 2u) \frac{\sin (2n + 1)u}{u} du$$

peut s'exprimer sous la forme :

$$\frac{\pi - x}{2} \int_{-\frac{x}{2}}^{0} \frac{\sin (2n + 1)u}{u} du + a_n .$$

b. L'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x + 2u) \frac{\sin (2n + 1)u}{u} du$$

peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\pi - x}{2} \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} \frac{\sin (2n + 1)u}{u} du + b_n ,$$

où a_n et b_n ont pour limite 0 lorsque n tend vers l'infini.

3° Déduire des résultats précédents et des conclusions du III les limites suivantes :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{-\pi-x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x + 2u) \frac{\sin (2n+1)u}{u} du ;$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{-\pi-x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x + 2u) \frac{\sin (2n + 1)u}{\sin u} du .$$

4° Démontrer que la suite de fonctions $\{f_n\}$ définie dans la partie I converge simplement vers f. En déduire que, pour tout $x \in [-\pi, +\pi]$, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx$$

est convergente, et donner sa somme.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail